Theorie Woche 8:

○ Normierte Vektorräume: Skript S. 62 f.

Wir haben bereits früh die euklidische Norm betrachtet. Nun erweitern wir unseren Begriff der Norm und betrachten weitere Normen und die Paarung eines V.R. und einer Norm. Definition & Regeln der Norm, sowie reelle und komplexe Beispiele finden sich im Skript.

○ Das Skalarprodukt in linearen Räumen: Skript S. 64 f.

Auch das euklidische Skalarprodukt haben wir bereits behandelt. Auch diesen Begriff erweitern wir nun: zentral ist vor allem der Begriff der induzierten Norm. Definition & Regeln des Skalarproduktes, sowie reelle und komplexe Beispiele finden sich im Skript.

○ Die Orthogonalprojektion: Skript S. 66

Die Orthogonalprojektion von $\underline{x} \in V$ auf $\underline{y} \in V$, $\underline{y} \neq 0$ ist:

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \cdot \underline{y}$$

Ich möchte euch aber eine Intuition geben, warum diese Formel stimmt, hierfür betrachten wir einmal das euklidische Skalarprodukt:

$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|_2 \cos\alpha$ mit $\|\underline{x}\|_2 \cdot \cos\alpha :=$ die Länge der Projektion in y Richtung $\hat{=} \|\underline{z}\|_2$

$$\Rightarrow \|\underline{x}\|_2 \cos\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2} = \|\underline{z}\|_2$$

Nun wollen wir aber noch die Richtungsangabe, also in Richtung y:

$$\Rightarrow \underline{z} = \|\underline{z}\|_2 \cdot \underbrace{\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2}}_{\substack{\text{Vektor in } y\text{-Richtung} \\ \text{aber normiert auf Länge 1.}}} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2^2} \cdot \underline{y}$$

und mit $\|\underline{y}\|_2^2 \overset{!}{=} \langle y, y \rangle$ folgt obige Formel:

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \cdot \underline{y}$$

Dies kann man auf <u>alle</u> Skalarprodukte ausweiten!

o Die Orthonormalbasis (ONB): Skript S. 66 u.

Wir leisten die Grundarbeit für das Gram-Schmidt-Verfahren.

Die beiden nötigen Theoreme findet ihr im Skript. Kurzgefasst ist es möglich, in jedem beliebigen Vektorraum nicht nur eine Basis, sondern sogar eine ONB, also eine Basis mit orthonormalen Einheitsvektoren, zu finden (stehen senkrecht aufeinander mit Länge 1).

∘ Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren:

Skript S. 67 - 75

Einer der wichtigsten Algorithmen, den ihr dieses Semester sehen werdet. Ermöglicht das Konstruieren einer ONB aus einer <u>beliebigen</u> Basis in einem Vektorraum. Das Kochrezept zum Algorithmus, sowie unzählige Beispiele, finden sich im Skript.